

מתמטיקה להנדסאי חשמל ואלקטרוניקה

פרק 20 - חשבון דיפרנציאלי - פונקציות לוגריתמיות

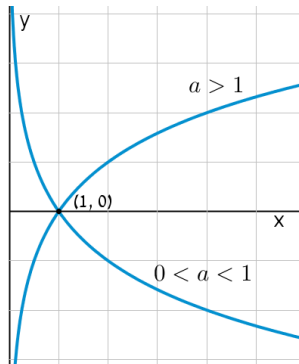
תוכן העניינים

1. הנגזרת של פונקציה לוגריתמית..... 1
2. חקירה של פונקציה לוגריתמית..... 6
3. שימושי הנגזרת..... 16

הנגזרת של פונקציה לוגריתמית:

סיכום כללי:

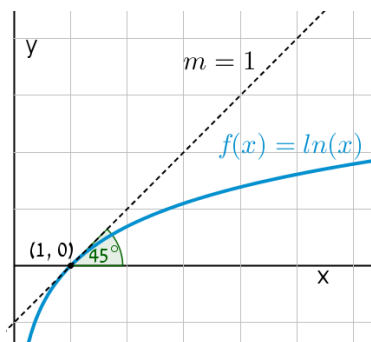
הגדרות כלליות:



להלן תיאורים גרפיים של פונקציה לוגריתמית כללית מהצורה: $f(x) = \log_a x$ עבור $a > 1$ ו- $0 < a < 1$:

תכונות כלליות:

- לפונקציות תחום הגדרה $x > 0$.
- הפונקציות תמיד חותכות את ציר ה- x בנקודה $(1, 0)$.
- עבור $a > 1$ הפונקציה עולה בכל ת.ה. ועבור $0 < a < 1$ הפונקציה יורדת בכל ת.ה.



עבור הפונקציות $f(x) = \ln x = \log_e x$ נקבל כי שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- x הוא 1:

תחום הגדרה של פונקציה לוגריתמית:

תחום ההגדרה של פונקציה לוגריתמית מהצורה: $y = \log(f(x))$ הוא: $f(x) > 0$.

נגזרות של פונקציות לוגריתמיות:

הפונקציה	הנגזרת
$y = \log_a x$	$y' = \frac{1}{x \ln a}$
$y = \log_a f(x)$	$y' = \frac{f'(x)}{f(x) \ln a}$
$y = \ln x$	$y' = \frac{1}{x}$
$y = \ln f(x)$	$y' = \frac{f'(x)}{f(x)}$

שאלות:

(1) גזור את הפונקציות הבאות (גזירה לוגריתמית יסודית עם ביטויים פנימיים שונים):

א. $f(x) = 3 \ln x + 4 \ln(x+2) - \ln(5x-1)$ ב. $f(x) = \ln(x^2 - 3x)$

ג. $f(x) = \ln \frac{x+1}{x-1}$ ד. $f(x) = \ln(e^x + 1)$

ה. $f(x) = \ln(\cos x)$ ו. $f(x) = \log_2 x + 5 \log_3(2x-1)$

(2) גזור את הפונקציות הבאות (מכפלה ומנה של פונקציות):

א. $f(x) = x \ln x$ ב. $f(x) = (3x+1)^2 \ln x$ ג. $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

ד. $f(x) = \frac{\ln x - 2}{\ln x + 2}$ ה. $f(x) = \sqrt{\ln x + x}$

(3) גזור את הפונקציות הבאות (פונקציות מורכבות):

א. $f(x) = \ln^3 x$ ב. $f(x) = 3 \ln^2 x$

ג. $f(x) = x^2 \ln^2 x$ ד. $f(x) = \frac{\ln^2 x + 1}{(\ln x + 1)^2}$

(4) גזור את הפונקציות הבאות (שאלות שונות):

- | | |
|----------------------------------|-------------------------------------|
| א. $f(x) = \ln(x+2)$ | ב. $f(x) = \ln^2 x + 2 \ln x - 3$ |
| ג. $f(x) = x^2 \ln x$ | ד. $f(x) = x^3 \ln x$ |
| ה. $f(x) = \ln e^{2x}$ | ו. $f(x) = e^x \ln x$ |
| ז. $f(x) = e^{-x^2} \ln x$ | ח. $f(x) = x^2(2 \ln x - 1)$ |
| ט. $f(x) = \ln(x^2)$ | י. $f(x) = \ln(x^4)$ |
| יא. $f(x) = (\ln x)^4$ | יב. $f(x) = x \ln x - \ln x^2$ |
| יג. $f(x) = \frac{(\ln x)^2}{x}$ | יד. $f(x) = \ln \sqrt{x}$ |
| טו. $f(x) = \sqrt{\ln x}$ | טז. $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ |

(5) גזור את הפונקציות הבאות (שאלות אתגר):

- | | |
|--|--|
| א. $f(x) = \ln \frac{x+2}{x}$ | ב. $f(x) = \ln \frac{x-1}{x+1}$ |
| ג. $f(x) = \ln \frac{x-3}{x+3}$ | ד. $f(x) = \ln \frac{(x-5)^3}{(x+1)^2}$ |
| ה. $f(x) = \ln \sqrt{x^2 - 1}$ | ו. $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2})$ |
| ז. $f(x) = e^{\sqrt{\ln x}}$ | ח. $f(x) = \ln \sqrt{\frac{1}{2-x}}$ |
| ט. $f(x) = \ln \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ | י. $f(x) = \ln \sqrt{\frac{1+5x}{1-5x}}$ |
| יא. $f(x) = \frac{\ln \sqrt[3]{x}}{x}$ | יב. $f(x) = \frac{(\ln x)^3}{x}$ |
| יג. $f(x) = \frac{x}{\ln(x^2)}$ | יד. $f(x) = \ln^2 x + \frac{1}{\ln^2 x}$ |
| טו. $f(x) = \frac{x}{\ln^4 x}$ | |

תשובות סופיות:

(1) א. $f'(x) = \frac{3}{x} + \frac{4}{x+2} - \frac{5}{5x-1}$ ב. $f'(x) = \frac{2x-3}{x^2-3x}$ ג. $f'(x) = \frac{-2}{(x-1)(x+1)}$

ד. $f'(x) = \frac{e^x}{e^x+1}$ ה. $f'(x) = -\tan x$ ו. $f'(x) = \frac{1}{x \ln 2} + \frac{10}{(2x-1) \ln 3}$

(2) א. $f'(x) = \ln x + 1$ ב. $f'(x) = (3x+1) \left(6 \ln x + \frac{3x+1}{x} \right)$ ג. $f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$

ד. $f'(x) = \frac{4}{x(\ln x + 2)^2}$ ה. $f'(x) = \frac{1+x}{2x\sqrt{\ln x + x}}$

(3) א. $f'(x) = \frac{3 \ln^2 x}{x}$ ב. $f'(x) = \frac{6 \ln x}{x}$ ג. $f'(x) = 2x \ln x (\ln x + 1)$

ד. $f'(x) = \frac{2(\ln x - 1)}{x(\ln x + 1)^3}$ ה. 2

(4) א. $\frac{1}{x+2}$ ב. $\frac{2 \ln x + 2}{x}$ ג. $x(2 \ln x + 1)$

ד. $x^2(3 \ln x + 1)$ ה. $e^x \left(\ln x + \frac{1}{x} \right)$ ו. $\frac{4}{x}$

ז. $e^{-x^2} \left(\frac{1}{x} - 2x \ln x \right)$ ח. $4x \ln x$ ט. $\frac{2}{x}$

י. $\frac{4(\ln x)^3}{x}$ יא. $\frac{2 \ln x - \ln^2 x}{x^2}$ יב. $\ln x + 1 - \frac{2}{x}$

יג. $\frac{1}{2x\sqrt{\ln x}}$ יד. $\frac{1}{2x}$ יו. $\frac{2 - \ln x}{2x\sqrt{x}}$

(5) א. $-\frac{2}{x(x+2)}$ ב. $\frac{2}{x^2-1}$ ג. $\frac{6}{x^2-9}$

ד. $\frac{3}{x-5} - \frac{2}{x+1}$ ה. $\frac{x}{x^2-1}$ ו. $\frac{\sqrt{x^2+a^2}+x}{x\sqrt{x^2+a^2}+x^2+a^2}$

ז. $\frac{e^{\sqrt{\ln x}}}{2x\sqrt{\ln x}}$ ח. $\frac{1}{4-2x}$ ט. $\frac{1}{x^2-1}$

$$\text{י.ב.} \quad \frac{3\ln^2 x - \ln^3 x}{x^2}$$

$$\text{ט.ו.} \quad \frac{\ln x - 4}{\ln^5 x}$$

$$\text{י.א.} \quad \frac{1 - 3\ln \sqrt[3]{x}}{3x^2}$$

$$\text{י.ד.} \quad \frac{2(\ln^4 x - 1)}{x \ln^3 x}$$

$$\text{י.} \quad \frac{5}{1 - 25x^2}$$

$$\text{י.ג.} \quad \frac{\ln(x^2) - 2}{\ln^2(x^2)}$$

חקירה של פונקציה לוגריתמית:

שאלות:

11) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

- א. $f(x) = \ln x$ ב. $f(x) = \ln(x^2)$
 ג. $f(x) = \log_3(x^2 - 8x - 20)$ ד. $f(x) = \ln(e^x - 4)$
 ה. $f(x) = \frac{x-1}{\ln x - 1}$ ו. $f(x) = \frac{1}{\ln^2 x - 2 \ln x - 3}$
 ז. $f(x) = \sqrt{\ln x - 1}$

12) מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה הבאה: $f(x) = 2 \ln x - x^2$.

13) מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה הבאה: $f(x) = x^2 \ln x$.

14) מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{\sqrt{2 \ln x - 1}}{x}$.

15) מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה הבאה: $f(x) = \log_4^2 x - \log_2 x$.

16) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{a \ln x + b}{x}$. הנקודה $\left(e^2, \frac{1}{e^2}\right)$ היא נקודת קיצון של הפונקציה. מצא את ערכי הפרמטרים a ו- b .

17) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{a \ln^2 x + b \ln x}{(\ln x + 1)^2}$. הנקודה $\left(\sqrt[3]{e}, -\frac{1}{8}\right)$ היא נקודת קיצון של הפונקציה. מצא את ערכי הפרמטרים a ו- b .

18) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x) = \ln(x-3)$.

19) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{1}{\ln x - 1}$.

(20) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{2 \ln x - 1}{\ln x + 1}$.

(21) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{\ln x - 2}{\ln^2 x - 4}$.

(22) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.

(23) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{x^2 - 1}{\ln^2 x + 1}$.

(24) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x) = x \ln x + 2$.

(25) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{\ln x}{x}$. מצא את נקודת הפיתול של הפונקציה.

(26) חקור את הפונקציות הבאות עפ"י הסעיפים הבאים:

- i. מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ii. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- iii. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה וקביעת סוגן.
- iv. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

א. $y = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 3 \ln x$	ב. $y = x \ln x$
ג. $y = x \ln x - x$	ד. $y = \sqrt{x} \ln x$
ה. $y = x^2 \ln x$	ו. $y = \ln(x^2 + 1)$

(27) נתונה הפונקציה $f(x) = 2x \ln^2 x$. חקור לפי הסעיפים הבאים:

- מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
- מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה וקביעת סוגן.
- כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(28) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x}{\ln x - 1}$. חקור לפי הסעיפים הבאים:

- תחום הגדרה של הפונקציה.
- מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה וקביעת סוגן.
- כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.
- מצא לאלו ערכי k הישר $y = k$ חותך את הפונקציה בשתי נקודות.

(29) נתונה הפונקציה $f(x) = \log_4^2 x - \log_2 x$. חקור לפי הסעיפים הבאים:

- תחום הגדרה של הפונקציה.
- מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה וקביעת סוגן.
- כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(30) נתונה הפונקציה: $f(x) = \sqrt{\ln x}$.

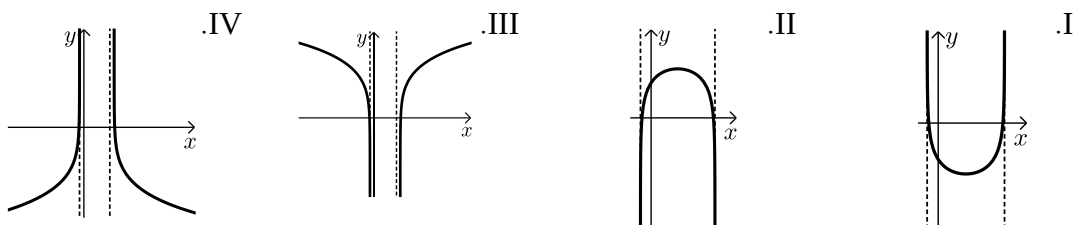
- מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?
- הוכח כי גרף הפונקציה עולה בכל תחום הגדרתו.
- מגדירים פונקציה נוספת: $g(x) = \ln x$.
- מצא את נקודות החיתוך של שני הגרפים.
- הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$ והנקודה B נמצאת על גרף הפונקציה $g(x)$. ידוע כי לנקודות A ו-B אותו שיעור x , $(x_A = x_B)$.
- מצא את שיעור ה- x של שתי הנקודות אם ידוע כי המשיקים לגרפים של הפונקציות בנקודות אלו מקבילים.

(31) נתונה שתי הפונקציות הבאות: $f(x) = \frac{x}{\ln x}$, $g(x) = \frac{\ln x}{x}$.

- א. קבע אילו מהמשפטים הבאים נכונים ואלו שגויים.
 נמק זאת ע"י חישוב מתאים ותקן במשפטים השגויים את הטעות.
- לשתי הפונקציות אותו תחום הגדרה.
 - לשתי הפונקציות יש נקודת קיצון מאותו סוג ובעלות שיעור x זהה.
 - לשתי הפונקציות תחומי עלייה וירידה זהים.
 - לשתי הפונקציות יש אסימפטוטות אנכיות.
- ב. בוחרים באקראי שתי נקודות, אחת על כל גרף, כך ששיעור ה- x שלהן זהה. הוכח כי מכפלת שיעורי ה- y של כל זוג נקודות כאלו שווה ל-1.

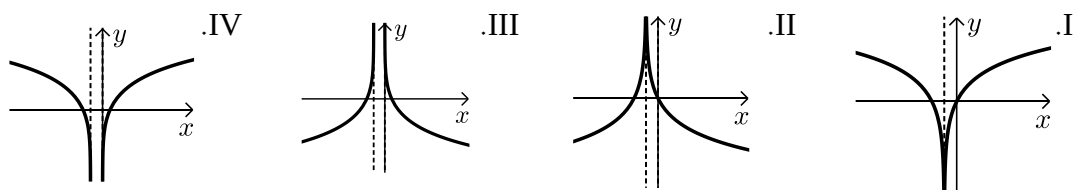
(32) נתונה הפונקציה הבאה: $y = \ln(x^2 - 6x - 7)$.

- א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
 ב. מהן האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לציר ה- y ?
 ג. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
 ד. לפניך 4 גרפים: I, II, III, ו-IV. איזה מהגרפים מתאים לפונקציה הנתונה. נמק.



(33) נתונה הפונקציה: $y = \ln(x^2 + 2x + 1)$.

- א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
 ב. מהי האסימפטוטה של הפונקציה המקבילה לציר ה- y ?
 ג. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
 ד. לפניך 4 גרפים: I, II, III, ו-IV. איזה מהגרפים מתאים לפונקציה הנתונה. נמק.



- ה. העזר בגרף שבחרת וכתוב את תחומי השליליות של הפונקציה.

34) לפינך הפונקציה הבאה : $f(x) = \ln(1 - \ln x)$.

- א. מה הוא תחום ההגדרה של הפונקציה?
- ב. הוכח כי הפונקציה יורדת בכל תחום הגדרתה.
- ג. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x .
- ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

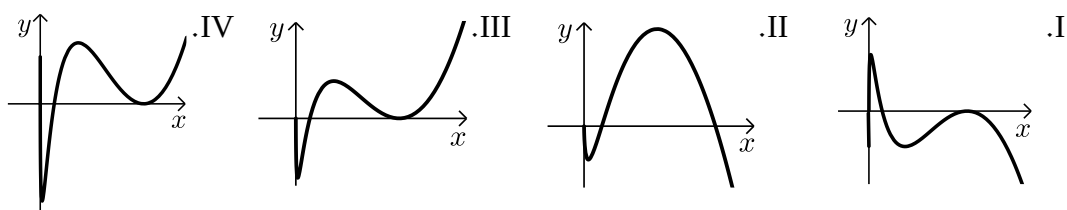
35) נתונה הפונקציה הבאה : $y = \ln \frac{2x+1}{x-1}$.

- א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ב. כתוב את האסימפטוטות האנכיות של גרף הפונקציה.
- ג. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x .
- ד. הראה כי גרף הפונקציה יורד בכל תחום הגדרתו.
- ה. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

36) נתונה הפונקציה הבאה : $f(x) = x(\ln^3 x + 2\ln^2 x)$.

- א. הראה כי נגזרת הפונקציה היא : $f'(x) = \ln^3 x + 5\ln^2 x + 4\ln x$.
- ב. מצא את התחום בו הפונקציה עולה.
- ג. ענה על השאלות הבאות :
 - i. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x .
 - ii. מצא את התחום בו הפונקציה חיובית.

ד. לפינך 4 גרפים. קבע איזה מהם מתאר את הפונקציה $f(x)$ ונמק את בחירתך.



37) נתונה הפונקציה : $f(x) = \ln^3 x - 3\ln x$.

- א. מה הוא תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ב. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x .
- ג. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.
- ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
- ה. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הפונקציה $g(x) = \ln x$.

(38) ענה על הסעיפים הבאים :

א. פתור את המשוואה הבאה : $\ln(x+e) - \ln(x\sqrt{e}) = \ln 2 - 0.5$

נתונה הפונקציה : $f(x) = \ln(x+e) - \ln(x\sqrt{e})$

ב. הראה כי הפונקציה יורדת בכל תחום הגדרתה.

ג. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה : $x=e$.

(39) נתונה הפונקציה הבאה : $y = \frac{x+a}{\ln(x+a)}$, a פרמטר חיובי, $a \neq 1$

א. הבע באמצעות a את :

i. תחום ההגדרה של הפונקציה.

ii. הנקודה המקיימת $y' = 0$.

iii. נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

iv. האסימפטוטה האנכית של הפונקציה.

ב. ידוע כי גרף הפונקציה עולה רק בתחום : $x > e-2$. מצא את a .

ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה בתחום $x > -1$.

ד. נתון הישר : $y = k$. מצא בסקיצה את תחום הערכים של k עבורו לישר ולגרף הפונקציה לא תהיה אף נקודה משותפת.

(40) נתונה הפונקציה הבאה : $y = \ln x + \frac{1}{x}$

א. ענה על הסעיפים הבאים :

i. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?

ii. יש לגרף הפונקציה אסימפטוטה מקבילה לציר y ?

אם כן מצא אותה.

ב. מצא את נקודת הקיצון של גרף הפונקציה וקבע את סוגה.

ג. כתוב את תחומי העלייה והירידה של גרף הפונקציה.

תשובות סופיות:

$$(11) \quad \text{א. } x > 0 \quad \text{ב. } x \neq 0 \quad \text{ג. } x > 10 \text{ או } x < -2 \quad \text{ד. } x > \ln 4$$

$$\text{ה. } 0 < x \neq e \quad \text{ו. } x > 0 \text{ וגם } x \neq e^3, e^{-1} \quad \text{ז. } x \geq e$$

$$(12) \quad \max(1, -1)$$

$$(13) \quad \min\left(\frac{1}{\sqrt{e}}, -\frac{1}{2e}\right)$$

$$(14) \quad \min(\sqrt{e}, 0) \text{ קצה, } \max\left(e, \frac{1}{e}\right)$$

$$(15) \quad \min(4, -1)$$

$$(16) \quad a = 1, b = -1$$

$$(17) \quad a = 1, b = -1$$

$$(18) \quad x = 3$$

$$(19) \quad \text{נקודת אי הגדרה } (0, 0), x = e, y = 0$$

$$(20) \quad \text{נקודת אי הגדרה } (0, 2), x = \frac{1}{e}, y = 2$$

$$(21) \quad \text{נקודת אי הגדרה } \left(e^2, \frac{1}{4}\right), (0, 0); x = \frac{1}{e^2}, y = 0$$

$$(22) \quad x = 0, y = 0$$

$$(23) \quad \text{נקודת אי הגדרה } (0, 0)$$

$$(24) \quad \text{נקודת אי הגדרה } (0, 2)$$

$$(25) \quad \left(\sqrt{e^3}, \frac{3}{2\sqrt{e^3}}\right)$$

$$(26) \quad \text{א. i. } x > 0 \quad \text{iii. } \max(1, -3.5), \min(3, \ln 27 - 7.5)$$

$$\text{iv. עולה: } 0 < x < 1, x > 3 \quad \text{יורדת: } 1 < x < 3 \quad \text{ב. i. } x > 0 \quad \text{ii. } (1, 0)$$

$$\text{iii. } \min(e^{-1}, -e^{-1}) \quad \text{iv. עולה: } x > e^{-1} \quad \text{יורדת: } 0 < x < e^{-1}$$

$$\text{ג. i. } x > 0 \quad \text{ii. } (e, 0) \quad \text{iii. } \min(1, -1) \quad \text{iv. עולה: } x > 1 \quad \text{יורדת: } 0 < x < 1$$

$$\text{ד. i. } x > 0 \quad \text{ii. } (1, 0) \quad \text{iii. } \min\left(e^{-2}, -\frac{2}{e}\right) \quad \text{iv. עולה: } x > e^{-2} \quad \text{יורדת: } 0 < x < e^{-2}$$

ה. i. $x > 0$ ii. $(1, 0)$ iii. $\min\left(\frac{1}{\sqrt{e}}, -\frac{1}{2e}\right)$ iv. עולה: $x > \frac{1}{\sqrt{e}}$ יורדת: $0 < x < \frac{1}{\sqrt{e}}$

ו. i. כל x ii. $(0, 0)$ iii. $\min(0, 0)$ iv. עולה: $x > 0$ יורדת: $x < 0$

(27) א. $x > 0$ ב. $\max\left(\frac{1}{e^2}, \frac{8}{e^2}\right), \min(1, 0)$

ג. עלייה: $x > 1$ או $0 < x < \frac{1}{e^2}$, ירידה: $\frac{1}{e^2} < x < 1$ ד. $(1, 0)$

(28) א. $0 < x \neq e$ ב. $\min(e^2, e^2)$ ג. עלייה: $x > e^2$, ירידה: $0 < x < e^2$

ו. $k > e^2$ ד. אין

(29) א. $x > 0$ ב. $\min(4, -1)$ ג. עלייה: $x > 4$, ירידה: $0 < x < 4$

ד. $(1, 0)$, $(16, 0)$

(30) א. $x \geq 1$ ב. מתקבל: $f'(x) = \frac{1}{2x\sqrt{\ln x}} > 0$ ג. $(e, 1)$, $(1, 0)$

ד. $x = \sqrt[4]{e}$

(31) א. i. לא נכון. תחום ההגדרה של $f(x)$ הוא: $x > 0, x \neq 1$ ותחום ההגדרה של $g(x)$ הוא: $x > 0$

ii. לא נכון. לשתי הפונקציות נקודת קיצון שבה $x = e$ אך עבור $f(x)$ מדובר במינימום ועבור $g(x)$ מדובר במקסימום.

iii. לא נכון. עבור $f(x)$: עולה: $x > e$ יורדת: $0 < x < e, x \neq 1$

ועבור $g(x)$: עולה: $0 < x < e$ יורדת: $x > e$ iv. נכון.

ב. לגבי כל נקודה נאמר כי שיעור ה- y שלה הוא: $y = \frac{x}{\ln x}$ ו- $y = \frac{\ln x}{x}$

נכפול: $y = \frac{x}{\ln x} \cdot \frac{\ln x}{x} = 1$

(32) א. $x < -1, x > 7$ ב. $x = -1, 7$ ג. עולה: $x > 7$ יורדת: $x < -1$

ד. III. הסבר: באיורים I ו-II גרף הפונקציה לא בתחום. באיור IV תחומי העלייה והירידה הפוכים.

(33) א. $x \neq -1$ ב. $x = -1$ ג. עולה: $x > -1$ יורדת: $x < -1$

ד. I. הסבר: באיור II תחומי העלייה והירידה הפוכים.

באיורים III ו-IV יש אסימפטוטה מיותרת. ה. $x \neq -1, -2 < x < 0$

(34) א. $0 < x < e$. (שימו לב כי תנאי ת.ה. הם: $1 - \ln x > 0$ וגם $x > 0$).

ב. $f'(x) = \frac{-\frac{1}{x}}{1 - \ln x} = -\frac{1}{x(1 - \ln x)} < 0$. ולכן הפונקציה יורדת בת.ה.
ג. $(1, 0)$.

(35) א. $x < -\frac{1}{2}, x > 1$. ב. $x = -\frac{1}{2}, 1$. ג. $(-2, 0)$.

ד. מתקבל: $y' = \frac{-3}{(2x+1)(x-1)} < 0$.

(36) ב. $x > 1, e^{-4} < x < e^{-1}$.

ג. i. 2 נקודות והן: $(e^{-2}, 0)$, $(1, 0)$. הנקודה שבה: $x = 0$ לא קיימת עקב ת.ה.

ii. $x \neq 1, x > e^{-2}$. ד. III – בראשית הצירים יש חור ולא אסימפטוטה. שאר הנתונים כפי שהתקבלו בסעיפים הקודמים.

(37) א. $x > 0$. ב. $(e^{-\sqrt{3}}, 0)$, $(e^{\sqrt{3}}, 0)$, $(1, 0)$. ג. $\min(e, -2)$, $\max(e^{-1}, 2)$.
ה. $(e^2, 2)$, $(e^{-2}, -2)$, $(1, 0)$.

(38) א. $x = e$. ב. מתקבל: $y' = \frac{-e}{x(x+e)} < 0$. ג. $y = -\frac{1}{2e}x + \ln 2$.

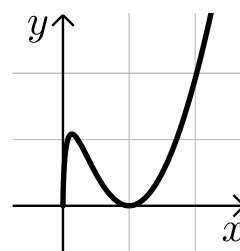
(39) א. i. $x > -a, x \neq 1-a$. ii. $(e-a, e)$. iii. $\left(0, \frac{a}{\ln a}\right)$.

iv. $x = 1-a$. ב. $a = 2$. ד. $k < e$.

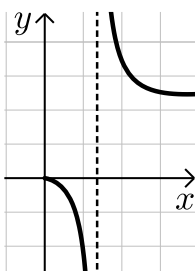
(40) א. i. $x > 0$. ii. $x = 0$. ב. $\min(1, 1)$. ג. עולה: $x > 1$, יורדת: $0 < x < 1$.

סקיצות לשאלות:

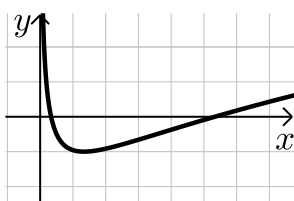
(27)



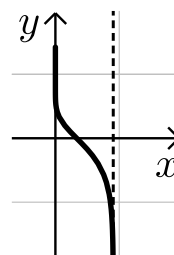
(28)



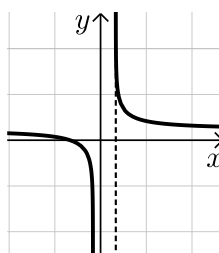
(29)



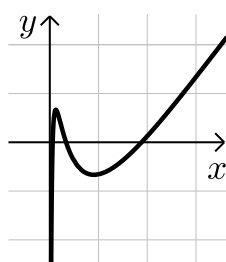
(34)



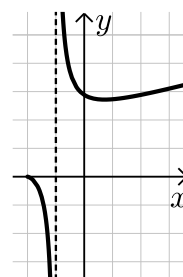
(35)



(37)



(39)



שימושי הנגזרת:

שאלות:

(6) מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x) = \ln x$ בנקודה $A(e, 1)$.

(7) שיפוע המשיק לפונקציה $f(x) = \frac{\ln^2 x + a}{\ln x + b}$ בנקודה $\left(\frac{1}{e}, -1\right)$ הוא $\frac{e}{3}$. מצא את ערכי הפרמטרים a ו- b .

(8) הגרפים של הפונקציות $f(x) = \ln x$ ו- $g(x) = 1 - f(x)$ נחתכים בנקודה A ברביע הראשון. בנקודה A העבירו משיק ל- $f(x)$. מצא את משוואת המשיק והוכח שמשיק זה עובר דרך הראשית.

(9) לפונקציה $g(x) = \frac{\ln x^2}{x}$ העבירו משיק בנקודה שבה $x = e^2$. מצא את משוואת המשיק.

(10) מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $y = x \ln(x^2 + 1)$ בנקודה שבה $x = 1$.

תשובות סופיות:

$$(6) \quad y = \frac{1}{e}x$$

$$(7) \quad a = 2, b = -2$$

$$(8) \quad y = \frac{1}{e}x$$

$$(9) \quad y = -\frac{2}{e^4}x + \frac{6}{e^2}$$

$$(10) \quad y = \ln 2 \cdot x + x - 1$$